المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2013
الموضوع

RS24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية........................(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بحساب الاحتمالات ....(3ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.........................(3.5ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.................................(8.25ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.............................(1.75ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول : (3.5 نقط)(الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما)

I - لكل x و y من المجال $G =]1,2[$ نضع: $x*y = \dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

0.5 — 1- بين أن * قانون تركيب داخلي في المجموعة G

2- نذكر أن $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية.

نعتبر التطبيق f من $\mathbb{R}_+^*$ نحو G المعرف بما يلي: $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

0.75 — أ) بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(G,*)$

0.5 — ب) استنتج أن $(G,*)$ زمرة تبادلية و حدد عنصرها المحايد .

II - نذكر أن $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية صفرها $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ووحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

و أن $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و نضع : $A=\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

0.5 — 1- أ) تحقق أن: $A^3 = O$ ثم استنتج أن A قاسم للصفر في الحلقة $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$.

0.5 — ب) تحقق أن: $(A^2-A+I)(A+I)=I$ ثم استنتج أن المصفوفة $A+I$ تقبل مقلوبا في $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ يتم تحديده.

0.75 — 2- لكل a و b من $\mathbb{R}$ نضع $M(a,b) = aI + bA$ و نعتبر المجموعة $E = \{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي وحدد أساسا له.

التمرين الثاني: (3 ن)

يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء و4 كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس .

I- نسحب عشوائيا بالتتابع وبإحلال أربع كرات من الصندوق ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق.

1 — 1) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X

0.5 — 2) احسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

II- نقوم بالتجربة العشوائية التالية في 3 مراحل كالآتي:

المرحلة 1: نسحب كرة من الصندوق ، نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق.

المرحلة 2: نضيف إلى الصندوق 5 كرات لها نفس لون الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى.

المرحلة 3: نسحب بالتتابع وبدون إحلال 3 كرات من الكيس الذي أصبح يحتوي على 12 كرة بعد المرحلة الثانية.

نعتبر الأحداث التالية:

N "الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى سوداء"

R "الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى حمراء"

E "جميع الكرات المسحوبة في المرحلة الثالثة سوداء"

0.5 — 1) بين أن: $p(E \cap N) = \dfrac{12}{55}$

0.5 — 2) احسب $p(E)$

0.5 — 3) احسب احتمال الحدث R علما أن الحدث E قد تحقق.

التمرين الثالث: (3.5 ن)

I - ليكن a عددا عقديا يخالف 1 .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(E): 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$

0.5 — 1) بين أن: $z_1 = \dfrac{(a-1)}{2}(1+i)$ و $z_2 = \dfrac{(a-1)}{2}(1-i)$ هما حلى المعادلة (E)

2) نأخذ: $a = e^{i\theta}$ حيث $0 < \theta < \pi$

0.5 — أ- بين أن: $a - 1 = 2\sin\dfrac{\theta}{2} e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

1 — ب- استنتج الشكل المثلثي لكل حل من الحلين z_1 و z_2

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نفترض أن: $\operatorname{Re}(a) < 0$ و نعتبر النقط $A(a)$ و $B(-i)$ و $C(i)$ و $B'(1)$

0.5 — 1) حدد لحقي كل من J و K منتصفي $[AC]$, $[AB]$ على التوالي بدلالة a

2) ليكن r_1 الدوران الذي مركزه J وقياس زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ و r_2 الدوران الذي مركزه K وقياس زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

نضع $C' = r_1(C)$ و $A' = r_2(A)$ و ليكن c' لحق C' و a' لحق A'

0.5 — بين أن: $a' = z_1$ و $c' = z_2$

0.5 — 3) أحسب $\dfrac{a'-c'}{a-1}$ ثم استنتج أن المستقيم (AB') ارتفاع في المثلث $A'B'C'$.

التمرين الرابع: (8.25 ن)

1) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2\ln^2 x}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

0.5 — أ- بين أن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 0 ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0.5 — ب - ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 0 (يمكنك استعمال النتيجة $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^2 x = 0$)

0.5 — ج - بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ وأن: $f'(x) = \dfrac{-x\ln x(1+\ln x)}{(1+x^2\ln^2 x)^{\frac{3}{2}}}$; $(\forall x > 0)$

0.5 — د - ضع جدول تغيرات الدالة f

2) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_1^x f(t)dt$

وليكن (C_F) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.25 أ - حدد دالة أصلية للدالة $x\longmapsto \frac{1}{x\ln x}$ على المجال $[e,+\infty[$

0.5 ب - بين أن: $(\forall t\geq e)\ ;\ t\ln t\leq\sqrt{1+t^2\ln^2 t}\leq\sqrt{2}\ t\ln t$

0.75 ج - بين أن: $(\forall x\geq e)\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)\leq\int_e^x\frac{1}{\sqrt{1+t^2\ln^2 t}}dt\leq\ln(\ln x)$

0.5 د- استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ وأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0$

0.5 ه - بين أن (C_F) يقبل نقطتي انعطاف المطلوب تحديد أفصول كل واحدة منهما.

1 ز - أنشئ (C_F) (نأخذ $F(1)=0,5$ و $F\left(\frac{1}{e}\right)=0,4$)

3) لكل x من $]0,+\infty[$ نضع: $\varphi(x)=x-F(x)$

0.75 أ - بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ ثم ادرس تغيرات الدالة φ

0.5 ب - بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$ ، المعادلة $\varphi(x)=n$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $]0,+\infty[$

0.5 ج - بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N});\ \alpha_n\geq n$ ثم احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

0.5 4) أ- بين أن: $(\forall n\geq1);\ 0\leq\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}\leq\frac{F(n)}{n}+f(n)$ (يمكنك استعمال مبرهنة التزايدات المنتهية)

0.5 ب - احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n}{n}$

التمرين الخامس: (1.75 ن)

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $u_n=\left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}$ و $v_n=\ln(u_n)$

0.25 1) تحقق أن: $(\forall n\geq1)\ ;\ v_n=n^2\Big(\ln\big(\arctan(n)\big)-\ln\big(\arctan(n+1)\big)\Big)$

0.5 2) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أن: $(\forall n\geq1)(\exists c\in]n,n+1[);\ v_n=\frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$

0.5 3) بين أن: $(\forall n\geq1);\ \frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)}<v_n<\frac{-n^2}{\left(1+(n+1)^2\right)\arctan(n+1)}$

0.5 4) احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

انتهى